第 2 講　数列の極限

PART1 数列の極限

要点整理と公式

要点① 数列と極限

項が有限である数列を有限数列，項が限りなく続く数列を無限数列という。

以下では，無限数列について考える。

$\{a_n\}: a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$

$a_n=\dfrac{1}{n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，n を限りなく大きくすると，第 n 項は限りなく 0 に近づく。

$\{a_n\}: 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\cdots$

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に「　　　」するといい，値 α を $\{a_n\}$ の「　　　　」という。このことを，次のように表す。

$a_n=\alpha$　　またはのとき a_n

※記号 ∞ は「　　　　」と読む。∞ はある値を表すものではない。

要点② 発散

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は「　　　」するという。$a_n=n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，n を限りなく大きくすると，第 n 項は限りなく大きくなる。

$\{a_n\}: 1,\ 4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ n^2,\ \cdots\cdots$

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n が限りなく大きくなるならば，$\{a_n\}$ は「　　　　　に発散」する，または $\{a_n\}$ の「極限は　　　　　」であるという。このことを，次のように表す。

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$　　　または　　$n\to\infty$ のとき $a_n\to$

$a_n=-3n+5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は，n を限りなく大きくすると，第 n 項は第 2 項より負の数となり，そこから先の項は負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる。

$\{a_n\}: 2,\ -1,\ -4,\ \cdots\cdots,\ -3n+5,\ \cdots\cdots$

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$\{a_n\}$ は「　　　　　　に発散」する，または $\{a_n\}$ の「極限は　　　　　」であるという。このことを，次のように表す。

$\lim_{n\to\infty} a_n =$　　　　　または　　$n\to\infty$ のとき $a_n \to$

※数列の極限が正の無限大，または負の無限大のとき，これらは極限値とはいわない。

$a_n=(-1)^{n-1}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，n を限りなく大きくしても，項が一定の値に近づかず，また正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

$\{a_n\}$：1，-1，1，……，$(-1)^{n-1}$，……

数列 $\{a_n\}$ が収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない場合，その数列は「　　　」するという。振動する数列 $\{a_n\}$ については，極限は存在しない。

数列の極限

「収束」	$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$	（値 α に収束）	極限値は α
「発散」	$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$	（正の無限大に発散）	極限は ∞
	$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$	（負の無限大に発散）	極限は $-\infty$
	振動		極限は ない

要点③ 数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束するとき，次の性質が成り立つ。

数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき

① $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　（ただし，k は定数）

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$　　$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

③ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$　　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$\beta\neq 0$）

(ex) $\lim_{n\to\infty} a_n=2$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)=4\lim_{n\to\infty} a_n-5\lim_{n\to\infty} b_n=4\cdot 2-5\cdot(-3)=23$$

1 (1) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\dfrac{5}{n^2}$　(ii) $-\dfrac{2}{n}$　(iii) $3n$

(iv) $-\sqrt{n}$　(v) 2^n　(vi) $(-3)^{n-1}$

(2) 次の極限値を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$

Point Pickup

数列の極限

収束　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　（値 α に収束）

発散
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$　（正の無限大に発散）
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$　（負の無限大に発散）
- 振動

とくに $k>0$ のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^k=$　(ex) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=$　(ex) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=$

数列の極限の性質

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$　（ただし，k は定数）

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$　（ただし，$\beta\neq0$）

第 2 講　PART1 確認問題

第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

答えは下の①～⑤のうちから選べ。

1　$2n+1$　［ア］

①　0 に収束　　②　1 に収束

③　正の無限大に発散　　④　負の無限大に発散

⑤　振動

2　$-\dfrac{1}{n^2}$　［イ］

①　0 に収束　　②　1 に収束

③　正の無限大に発散　　④　負の無限大に発散

⑤　振動

3　$-\sqrt{n+1}$　［ウ］

①　0 に収束　　②　1 に収束

③　正の無限大に発散　　④　負の無限大に発散

⑤　振動

4　$(-2)^n$　［エ］

①　0 に収束　　②　1 に収束

③　正の無限大に発散　　④　負の無限大に発散

⑤　振動

5　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$　［オ］

①　0 に収束　　②　1 に収束

③　正の無限大に発散　　④　負の無限大に発散

⑤　振動

次の極限値を求めよ。

6 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=$ [カ]

7 $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=$ [キ]

8 $\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=$ [ク]

[MEMO]

第 2 講　数列の極限

PART1 数列の極限

1 (1) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(i) $\dfrac{5}{n^2}$　(ii) $-\dfrac{2}{n}$　(iii) $3n$

(iv) $-\sqrt{n}$　(v) 2^n　(vi) $(-3)^{n-1}$

(2) 次の極限値を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$

[解答]

(1)(i) $\dfrac{5}{1},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{9},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{5}{n^2},\ \cdots\cdots$より　0 に収束

(ii) $-\dfrac{2}{1},\ -\dfrac{2}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \cdots\cdots,\ -\dfrac{2}{n},\ \cdots\cdots$より　0 に収束

(iii) $3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\ 3n,\ \cdots\cdots$より　正の無限大に発散

(iv) $-\sqrt{1},\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \cdots\cdots,\ -\sqrt{n},\ \cdots\cdots$より　負の無限大に発散

(v) $2,\ 4,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 2^n,\ \cdots\cdots$より　正の無限大に発散

(vi) $1,\ -3,\ 9,\ \cdots\cdots,\ (-3)^{n-1},\ \cdots\cdots$より　振動

(2)(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=1+0=1$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2-0=2$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5+0}{2-0}=\frac{5}{2}$

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

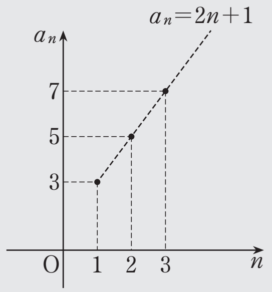
[解説]

数列は,

$$3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2n+1,\ \cdots$$ [A]

であるから, **正の無限大に発散する。**

[A]　n を限りなく大きくすると, $2n+1$ は限りなく大きくなる。



2

[正解] イ：①

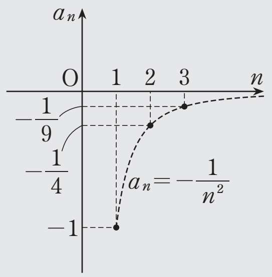
[解説]

数列は,

$$-1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \cdots,\ -\frac{1}{n^2},\ \cdots$$ [B]

であるから, **0 に収束する。**

[B]　n を限りなく大きくすると, $-\frac{1}{n^2}$ は限りなく 0 に近づく。



3

[正解] ウ：④

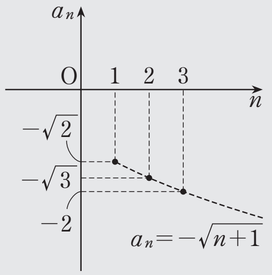
[解説]

数列は,

$$-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \cdots,\ -\sqrt{n+1},\ \cdots$$ [C]

であるから, **負の無限大に発散する。**

[C]　n を限りなく大きくすると, $-\sqrt{n+1}$ は負の値で, その絶対値は限りなく大きくなる。



4　[正解] エ：⑤

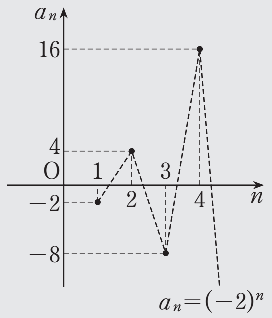
[解説]

数列は,

$$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots$$ [D]

であるから，**振動する。**

[D]



5　[正解] オ：①

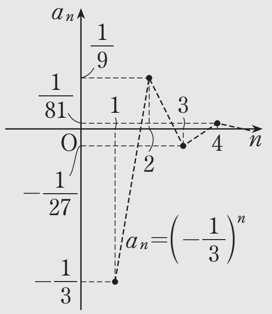
[解説]

数列は,

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \cdots$$ [E]

であるから，**0 に収束する。**

[E]　n を限りなく大きくすると，$\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ は限りなく 0 に近づく。



6　[正解] カ：2

[解説]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=0+2$$ [F]

$$=\mathbf{2}$$

[F]　数列の極限の性質
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき,
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$$

7　[正解] キ：1

[解説]

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1-0$$ [G]

$$=\mathbf{1}$$

[G]　数列の極限の性質
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき,
$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$$

8 **[正解]** ク：2

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{2}{n}\right)=6$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)=3$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{6}{3}$$ [H]

$$=\mathbf{2}$$

[H]　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}\quad（ただし，\beta\neq 0）$$